

ТВиМС 2026. Программы БИ, УЦП, ТАДвБ ВШБ ВШЭ.

Лист задач для самостоятельного решения #3.

Условная вероятность. Полная вероятность. Теорема Байеса.

1. Компания А обанкротится с вероятностью 0.4, компания В обанкротится с вероятностью 0.2 независимо от первой. Найти вероятности следующих событий:

- (a) обанкротится ровно одна компания.
- (b) обанкротится хотя бы одна компания.
- (c) обанкротятся обе компании.
- (d) обанкротилась А, если известно, что обанкротилась ровно одна компания.
- (e) обанкротилась А, если известно, что обанкротилась как минимум одна компания.

Укажите все места, где использовалась независимость, все места, где использовалась несовместность.

2. Брат и сестра путешествуют на поезде. У них обоих нет билетов, и контролёр поймал их. Он уполномочен применить особое наказание за это правонарушение. У него есть коробка с девятью внешне одинаковыми шоколадными конфетами, три из которых содержат снотворное моментального действия, такое, что человек проспит месяц. Контролёр заставляет каждого из нарушителей по очереди выбрать и немедленно съесть одну конфету.

- (a) Если брат выбирает перед сестрой, какова вероятность того, что он уснет?
- (b) Если брат выбирает первым и не впадает в кому, какова вероятность того, что сестра останется бодрствующей?
- (c) Если брат выбирает первым и впадает в кому, какова вероятность того, что сестра останется бодрствующей?
- (d) В интересах ли сестры убедить брата выбирать первым? *И.е.* есть ли разница в вероятности засыпания в зависимости от того, кто выбирает первым?

3. Подбросили две игральные кости. Введем следующие события: A – на первой кости выпала тройка, B – сумма очков является четным числом, C – на второй кости выпало больше очков, чем на первой.

- (a) Найдите вероятность каждого из событий A , B и C .
- (b) Найдите условную вероятность $P(A|C)$.
- (c) Проверьте, есть ли среди событий A , C и $B \cap C$ пары независимых событий.

4. Три студента – А, В и С независимо друг от друга опаздывают на занятия с соответствующими вероятностями 0.6, 0.3, и 0.8.

- (a) Найти вероятность того, что никто из них не опаздывает.
- (b) Найти вероятность того, что опоздают ровно двое из них.
- (c) Найти вероятность того, что опоздает хотя бы один из них.
- (d) Найти вероятность того, что А опоздал, если известно, что опоздал как минимум один из них.
- (e) Известно, что А опоздал, найти вероятность того, что опоздали как минимум двое из них.

Укажите все места, где использовалась независимость, все места, где использовалась несовместность.

5. Студент сдает сессию. Рассмотрим два события: A – студент готовится к экзамену по теорверу, B – студент сдает экзамен по теорверу на отлично. Известны вероятности следующих событий: $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.2$, $P(A \cap B) = 0.18$.

Найдите вероятности, дайте словесные формулировки событий: $P(A \cup B)$, $P(A|B)$, $P(A|\bar{B})$, $P(\bar{A}|B)$, $P(\bar{B}|A)$, $P(B|\bar{A})$.

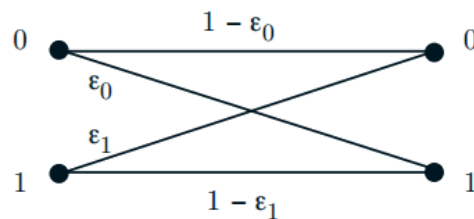
Например, по последней вероятности словесная формулировка: найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если известно, что он не готовился.

6. Событие A заключается в наступлении кризиса, вероятность этого 0.4, событие B заключается в том, что компания обанкротится, вероятность этого 0.5. Вероятность того, что произойдут оба события одновременно, равна 0.3.

Найти вероятности, дать словесные формулировки: $P(A|B)$, $P(\bar{A}|\bar{B})$, $P(B|\bar{A})$, $P(A|(\bar{A}B \cup A\bar{B}))$

Указание: в последнем пункте условием является все событие $(\bar{A}B \cup A\bar{B})$ – если записывать словами, то можно сформулировать так: "известно, что произошло ровно одно из этих двух событий".

7. Wi-Fi роутер передаёт мемы через зашумлённый канал связи. Телефон принимает символы **неправильно** с вероятностью ε_0 и ε_1 соответственно. Ошибки в различных передачах символов **независимы**.



В попытке улучшить надёжность, каждый символ передаётся три раза, и принятая строка декодируется по правилу большинства. Другими словами, например, 0 передаётся как 000, и декодируется на приёмнике как 0 **тогда и только тогда**, когда принятая трёхсимвольная строка содержит не менее двух 0. Например, 101 декодируется как 1, а 001 декодируется как 0. Какова вероятность того, что:

- переданный символ 1 будет правильно декодирован?
 - переданный символ 0 будет правильно декодирован?
 - Для каких значений ε_0 в новой схеме будет наблюдаться улучшение в вероятности правильного приёма символа 0 по сравнению с базовым вариантом?
8. Для сдачи зачета студенту предлагают последовательно решить три задачи. Зачет он получит в том случае, если у него будут две **подряд** решенные задачи. Сами задачи бывают "Сложные" и "Простые" (отличаются вероятностями их решить, для первого типа p_1 , для второго p_2 , $p_1 < p_2$). Преподаватель чередует задачи по сложности (то есть существует только два варианта выдачи: СПС и ПСП). Что выгоднее для студента: чтобы среди трех выданных задач было две сложные или две простые задачи?
9. Торговая сеть планирует открытие нового супермаркета. Если рядом будут находиться магазины конкурентов, то супермаркет окажется прибыльным с вероятностью 0.3. Если конкурентов рядом не будет, то прибыльным он окажется с вероятностью 0.4. Вероятность найти помещение, рядом с которым не будет конкурентов, равна 0.8.
- Найти вероятность того, что новый супермаркет окажется прибыльным.
 - Известно, что новый супермаркет оказался прибыльным. Найти вероятность того, что рядом нет магазинов конкурентов.
10. Есть три монеты: у одной с обеих сторон орел, у второй с обеих сторон решка, у третьей орел с одной стороны и решка с другой. Мы выбираем монету наугад, подбрасываем её, и выпадает орел. Какова вероятность того, что на противоположной стороне решка?
11. В урне A находятся 2 белых шара и 1 черный шар, а в урне B находятся 1 белый шар и 5 черных. Один случайный шар из урны A помещают в урну B . Затем из урны B вынимается шар, который оказывается белым. Какова вероятность того, что переложенный шар был белым?

12. При приеме на работу 10% кандидатов сообщают ложную информацию о себе. Для выявления таких случаев работодатель проводит дополнительное психологическое тестирование. Однако тест не является абсолютно точным – если соискатель лгал, тест в 5% случаев этого не определит. С другой стороны, у теста бывают и «ложные срабатывания» – в 20% случаев человека, сообщившего только достоверную информацию, он примет за лжеца. На очередном тестируемом тест сработал, то есть указал, что соискатель лжет. Найти вероятность того, что соискатель действительно лгал.
13. У студента ВШБ на Шаболовке 27% занятий проходят в пятом корпусе, 24% в третьем, 20% в четвертом, а остальные занятия проходят в К9 и К10. Если занятие проходит в пятом корпусе, то с вероятностью 0.3 студент займет место в первом ряду. Если занятие проходит в третьем корпусе, то вероятность занять место в первом ряду для него равна 0.2, в четвертом 0.1, в К9 и К10 вероятность равна 0.01. Во время пары на Шаболовке студент отвечает на входящий звонок: "Извини, не могу разговаривать, сижу в первом ряду". Найти вероятность того, занятие проходит в четвертом корпусе.
14. Компания А собирается выводить на рынок новую игровую приставку. Ее конкуренты – компании В и С, работающие независимо друг от друга, каждая из которых может опередить А с вероятностью 0.6. Если у приставки А на момент выхода в продажу не будет конкурентов, то она окажется успешной с вероятностью 0.9, если к этому моменту свою приставку успеет выпустить только один конкурент, то вероятность успеха равна 0.7, если же на рынке будут оба конкурента – вероятность успеха А равна 0.4.
- (a) Найти вероятность того, что продукт окажется успешным.
 - (b) Известно, что продукт оказался успешным. Найти вероятность того, что это произошло при отсутствии конкурентов.
 - (c) Известно, что продукт не оказался успешным. Найти вероятность того, что только один из конкурентов успел обогнать А.
15. Если в день перед экзаменом Вася идет только в кино, то сдает экзамен с вероятностью 0.6. Если в день перед экзаменом Вася идет только в бар, то сдает экзамен с вероятностью 0.5. Если в день перед экзаменом Вася идет и в кино, и в бар – то сдает экзамен с вероятностью 0.1. Если в день перед экзаменом Вася сидит дома, то сдает экзамен с вероятностью 0.9. В кино и в бар Вася ходит независимо друг от друга и от других событий, с вероятностями 0.2 и 0.6 соответственно.
- (a) Найти вероятность того, что Вася сдаст экзамен.
 - (b) Найти вероятность того, что Вася вчера был и в баре и в кино, если известно, что он сдал экзамен.
 - (c) Найти вероятность того, что Вася вчера был в баре, если известно, что он сдал экзамен.
 - (d) Вася сдал экзамен. Что более вероятно – то, что он вчера был в баре, или то, что он вчера был в кино?
16. Преподаватель теорвера проводит опрос о том, насколько студенты заинтересованы в изучении предмета. Однако студенты не уверены в полной анонимности, поэтому преподаватель понимает, что: если студент написал, что его интересует предмет – с вероятностью 0.2 он ответил неправду, если же студент написал, что его не интересует предмет, то это честный ответ. По результатам опроса оказалось, что 30% студентов написали, что предмет их не интересует. Преподаватель знает, что некоторый студент точно не интересуется предметом. Найти вероятность того, что этот студент честно ответил на вопрос.
17. Компании необходимо получить лицензию на строительство завода. Лицензионная комиссия состоит из двух инспекторов, которые будут независимо оценивать проект завода. Чтобы получить лицензию, оба инспектора должны дать положительную оценку. Компания знает, что каждый из инспекторов даст положительную оценку с вероятностью 70%, независимо от другого инспектора. Однако, если компания даст взятку инспектору, и он ее примет, вероятность получить положительную оценку увеличится до 90% (но все еще есть 10% вероятность, что инспектор возьмет взятку и даст отрицательную оценку). Каждый инспектор примет взятку с вероятностью 50%. Если инспектор не примет взятку, он даст положительную оценку с вероятностью 70%.
- (a) Какова вероятность того, что компания получит лицензию, если она не будет давать взятку?
 - (b) Какова вероятность того, что компания получит лицензию, если она попытается дать взятку обоим инспекторам?
 - (c) Предположим, что один из инспекторов принял взятку, а другой нет, но оказалось, что компания не получила лицензию. Учитывая эту информацию, найдите условную вероятность того, что подкупленный инспектор дал отрицательную оценку.

18. Школьник Вася должен написать и сдать работу по географии. С вероятностью 0.2 он этого делать не будет. Если же он напишет работу, то с вероятностью 0.4 работу съест его собака. Если собака не сделает этого, то с вероятностью 0.6 Вася забудет взять работу в школу. Если Вася возьмет работу в школу, то с вероятностью 0.1 потеряет ее по дороге. Если он донесет работу до школы, то сдаст ее.
- (a) Найти вероятность того, что Вася сдаст работу.
 - (b) Известно, что Вася не сдал работу. Найти вероятность того, что ее съела собака.
19. Студент сдает экзамен с вероятностью 0.8. Если этого не происходит, то он отправляется на пересдачу, и вероятность сдать становится равной 0.6. Если он не сдает и со второго раза, то отправляется на комиссию, и там сдает с вероятностью 0.7, и если снова не сдал – получает ИУП. Известно, что студент сдал экзамен, то есть дело не дошло до ИУПа. Найти вероятность того, что экзамен был сдан со второй попытки.