

ТВиМС 2026. Программы БИ, УЦП, ТАДвБ ВШБ ВШЭ.

Лист задач для самостоятельного решения #4.

Дискретные случайные величины и их характеристики.

1. Есть игра, в результате которой мы можем проиграть 5 рублей с вероятностью 0.1, сыграть в ноль (то есть ничего не получить, но и ничего не потерять) с вероятностью 0.2 и выиграть 1 рубль с вероятностью 0.7.
 - (а) Постройте таблицу функции вероятности (ряд распределения) для выигрыша в одной игре, найдите математическое ожидание выигрыша. Является ли игра для нас плюсовой? Т.е. если мы будем долго в нее играть – мы в результате будем больше выигрывать или проигрывать? Найдите дисперсию и стандартное отклонение выигрыша в одной партии (если мы проиграли, то будем говорить, что наш выигрыш равен -5).
 - (б) Запишите функцию распределения $F_X(x)$, нарисуйте график, используя функцию распределения найдите вероятность того, что наш выигрыш окажется в промежутке $(-0.5; 1.2]$.
 - (с) Найдите вероятность того, что выигрыш отклонится от своего математического ожидания менее чем на стандартное отклонение.
2. Если функция распределения случайной величины X задана следующим образом:

$$F(b) = \begin{cases} 0 & b < 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \leq b < 1 \\ \frac{3}{5} & 1 \leq b < 2 \\ \frac{4}{5} & 2 \leq b < 3 \\ \frac{9}{10} & 3 \leq b < 3.5 \\ 1 & b \geq 3.5 \end{cases}$$

Постройте таблицу функции вероятности X (ряд распределения). Посчитайте математическое ожидание и дисперсию.

3. Заполните ряд распределения до конца, если известно, что $E[X] = 0$.

x	-1	0	a	4
$p_X(x)$	0.6	p_1	0.1	0.1

4. Найдите a , p_1 и p_2 , если известно, что $E[X] = 0$ и $Var[X] = 5.4$.

x	-2	-1	0	a	4
$p_X(x)$	0.4	0.2	p_1	0.1	p_2

5. Пусть X — случайная величина с $E[X^2] = 3.6$, $P_X(X = 2) = 0.6$ и $P_X(X = 3) = 0.1$. Случайная величина X принимает только одно другое значение между 0 и 3. Найдите дисперсию X .
6. В урне находятся 2 черных и 5 белых шаров. Вы случайным образом выбираете 3 из них. X — это количество черных шаров в вашей выборке. Найдите математическое ожидание и дисперсию X .
7. В клубе 10 хороших стрелков и 3 плохих. На очередное соревнование случайным образом отбирается команда из трех человек.
 - (а) Пусть случайная величина X — число плохих стрелков, попавших в команду. Для всех возможных значений X найдите значения функции вероятности $P_X(x)$, также посчитайте $E[X]$ и $Var[X]$.
 - (б) Пусть случайная величина Y — число хороших стрелков, попавших в команду. Постройте ряд распределения случайной величины Y , посчитайте $E[Y]$ и $Var[Y]$.

(с) Сравните результаты.

8. Три рассеянных математика, уходя из гостей, произвольным образом забирают по зонту (всего их было три – каждый из математиков пришел со своим зонтом). Пусть X – число математиков, забравших именно свой зонт. Постройте ряд распределения, найдите математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины X .
9. Цены на акции компаний А, В и С растут независимо друг от друга с вероятностями 0.3, 0.4 и 0.8 соответственно. Пусть X – число тех компаний среди этих трех, чьи акции выросли.
- (а) Постройте ряд распределения, найдите математическое ожидание и стандартное отклонение.
- (б) Найдите вероятность того, что X отклонится от своего математического ожидания более чем на одно стандартное отклонение.
10. При обсуждении любимой кофейни около Вышки студенты выяснили следующее:
- (а) Андрей по дороге в Вышку покупает кофе с вероятностью $1/3$, независимо от этого по дороге домой он покупает кофе с вероятностью $1/4$. Пусть случайная величина X это то, сколько раз за день Андрей купил кофе.
- (б) Борис по дороге вперед покупает кофе с вероятностью $1/3$, по дороге домой он покупает кофе с вероятностью $1/4$. Так же известно, что с вероятностью $1/5$ он купит кофе как по дороге вперед, так и по дороге домой. Пусть случайная величина Y это то, сколько раз за день Борис купил кофе.
- (с) Валерия по дороге вперед покупает кофе с вероятностью $1/3$ (это всегда большая порция Американо за 240 рублей), независимо от этого по дороге домой она покупает кофе с вероятностью $1/4$ (маленькая порция Капучино за 90 рублей). Пусть случайная величина W это то, сколько денег за день Валерия потратила на кофе.

Найти матожидание и стандартное отклонение упомянутых случайных величин. (Будем считать, что в других ситуациях люди в кофейню не заходят, нигде кроме как в этой кофейне кофе не покупают)

11. Пусть вероятности и значения случайной величины X заданы следующим образом:

$$P_X(X = 1) = p$$

$$P_X(X = -1) = 1 - p$$

Найдите такую константу c , $c \neq 1$, чтобы случайная величина $Y = f(X) = c^X$ имела математическое ожидание 1.

12. Задача важная на будущее :)

Пусть X - дискретная случайная величина с $E[X] = a$ и $Var[X] = b^2 \neq 0$. Мы строим новую случайную величину, которая является функцией от X :

$$Y = g(X) = \frac{X - a}{b}$$

Найдите $E[Y]$ и $Var[Y]$.

Подсказка: можно попробовать разные способы: или использовать готовые свойства математического ожидания и дисперсии, или напрямую поработать с их формулами.