

Теория вероятностей и математическая статистика

Вероятностное пространство. Классическая, комбинаторная вероятность.

Глеб Карпов

Курс для программ БИ, УЦП, ТАДвБ ВШБ ВШЭ

Андрей Колмогоров меняет всё

Описание случайного эксперимента

Пространство элементарных исходов

- Множество, которое содержит все возможные уникальные результаты случайного эксперимента:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_n, \dots\}$$

- Может быть конечным или бесконечным
- Критически зависит от установки случайного эксперимента и того, что мы хотим наблюдать и описывать

Описание случайного эксперимента

Пространство элементарных исходов: примеры

- Подбрасываются две визуально различимые монеты: $\Omega = \{Hh, Tt, Ht, Th\}$
- Подбрасываются две идентичные монеты: $\Omega = \{2H, 2T, Diff\}$
- Идентичные монеты с внедренным различием: $\Omega = \{Hh, Tt, Ht, Th\}$
- Кубик со сторонами-буквами: $\Omega = \{a, b, c, d, e, f\}$

Описание случайного эксперимента

Событие

- Зачастую нас интересует не конкретный элементарный исход, а набор из нескольких, e.g. “Если выпадет 2, 3, 6”, то мы получим выигрыш
- Множество, построенное из одного или нескольких элементарных исходом называют событием
- Мы говорим, что событие произошло, если реализовался какой-то из элементарных исходов этого события.
-

 Важно!

Критическое отличие от элементарного исхода: исход случается один и только один, событий случается одновременно несколько, все, содержащие рассматриваемый элементарный исход.

Описание случайного эксперимента

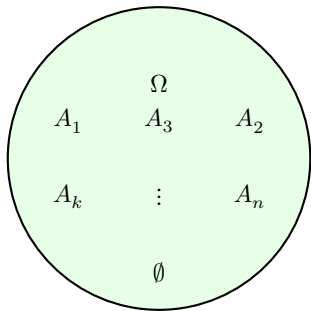
Пространство событий

- Множество, которое содержит все возможные события, которые можно построить из множества исходов Ω
- Иными словами, множество всех возможных подмножеств Ω :

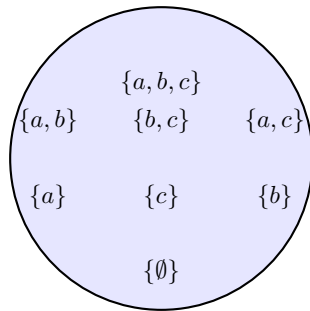
$$\mathcal{F} = \{A_1, A_2, A_n, \dots\}, \forall A_i \subset \Omega$$

- Само пространство элементарных исходов тоже событие: $\Omega \subset \Omega$, поэтому $\Omega \in \mathcal{F}$

($\mathcal{F}$, в общем виде)



(Пример $\mathcal{F}$: все подмножества $\{a, b, c\}$)



Описание случайного эксперимента

Пространство событий

i Question

Если мощность пространства элементарных исходов $|\Omega| = n$, какая будет мощность пространства событий $|\mathcal{F}|$?

i Question

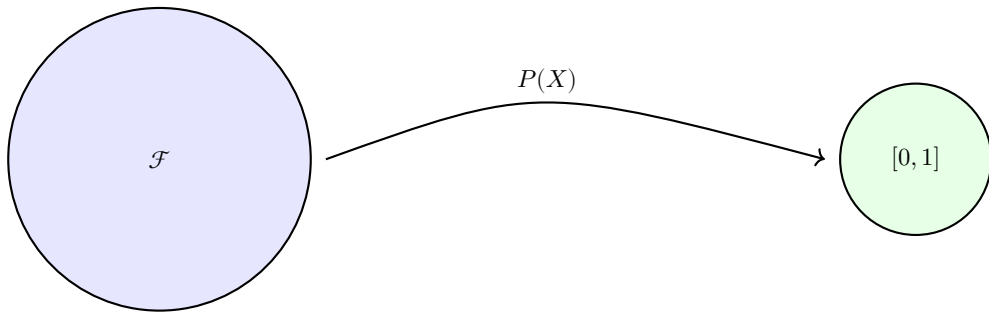
Дополнение про отличие исхода от события. Предположим, что реализуется некий элементарный исход. Сколько событий случается одновременно? Другими словами: сколько подмножеств множества мощности n содержат некий зафиксированный элемент?

Описание случайного эксперимента

Вероятность

- В конечном счете мы хотим наклеить на каждое событие “бирку” с информацией о том, насколько мы уверены в том, что событие случится
- Этот коэффициент нашей уверенности решили измерять от 0 до 1, его-то и называем вероятностью
- Формально, вероятность представляет собой функцию, которая каждому событию ставит в соответствие число:

$$P(X) : \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R}$$



Свойства вероятностной функции

- $0 \leq P(X) \leq 1, \forall X \in \mathcal{F}$
- $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0$
- Свойство аддитивности вероятности:

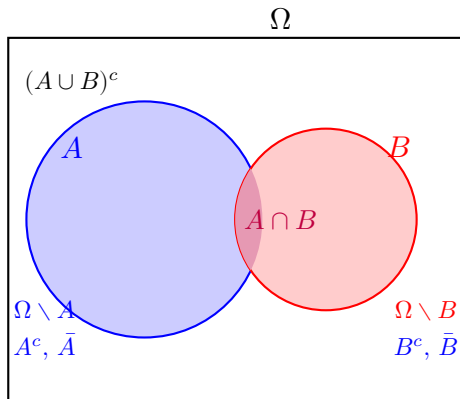
$$\forall X, Y \in \mathcal{F} : X \cap Y = \emptyset, P(X \cup Y) = P(X) + P(Y)$$

Более душно: Если коллекция событий $A_1, A_2, \dots$ - попарно не пересекаются, i.e. $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$, то:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) = \sum_{i=1}^m P(A_i)$$

Вероятность

Комплиментарные события и формула включений исключений



- **Свойство:** Если $A \in \mathcal{F}$, то $P(A) + P(\Omega \setminus A) = 1$. События A и $\bar{A} = \Omega \setminus A$ такие, что $A \cap \bar{A} = \emptyset$, и $\Omega = A \cup \bar{A}$, откуда при помощи свойств вероятности получим:
 $P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\Omega \setminus A) = 1$

- **Формула включений-исключений:** Если $A, B \in \mathcal{F}$, то

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Событие A - объединение непересекающихся $A \setminus B$ и $A \cap B$, следовательно $P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$ и симметрично $P(B) = P(B \setminus A) + P(A \cap B)$.

$$\begin{aligned} P(A) + P(B) &= P(A \setminus B) + 2P(A \cap B) + P(B \setminus A) \\ &= P((A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)) + P(A \cap B) \\ &= P(A \cup B) + P(A \cap B). \end{aligned}$$

- **Свойство:** Если $A, B \in \mathcal{F}$ and $A \subseteq B$, то $P(A) \leq P(B)$. Показать просто: $P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A)$.

Классическая вероятность

- Самая первая модель вероятностного эксперимента, суть которой состоит в предположении о равной вероятности элементарных исходов случайного эксперимента. Под это подходят многие дискретные задачи, связанные со случайным выбором карт, шариков, людей, бросками кубиков и монеток, etc.
- Формализуем: $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, $P(\{\omega_1\}) = \dots = P(\{\omega_n\}) = p$.
- Применим свойства вероятности, чтобы получить интуитивно понятный результат о вероятности элементарного исхода:

$$\Omega = \{\omega_1\} \cup \dots \cup \{\omega_n\} = \bigcup_{i=1}^n \{\omega_i\}$$

$$P(\Omega) = P\left(\bigcup_{i=1}^n \{\omega_i\}\right) = \sum_{i=1}^n P(\{\omega_i\}) = n \cdot p = 1 \rightarrow p = \frac{1}{n}$$

Классическая вероятность

Первая важная формула

- Без потери общности предположим, что некое событие A состоит из $k \leq n$ элементарных исходов, $A = \{\omega_1, \dots, \omega_k\}$. Нас интересует $P(A)$.
- Получим формулу для вероятности A :

$$A = \{\omega_1\} \cup \dots \cup \{\omega_k\} = \bigcup_{i=1}^k \{\omega_i\}$$

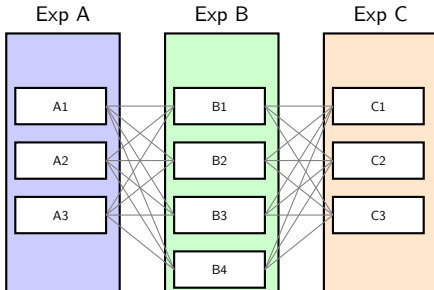
$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^k \{\omega_i\}\right) = \sum_{i=1}^k P(\{\omega_i\}) = k \cdot p = \frac{k}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Комбинаторная вероятность

Basic principle of counting

Definition

Если r экспериментов должны быть проведены таким образом, что первый может привести к любому из n_1 возможных исходов; и если для каждого из этих n_1 возможных исходов есть n_2 возможных исхода второго эксперимента; и если для каждого из возможных исходов первых двух экспериментов есть n_3 возможных исхода третьего эксперимента; и если ..., то всего существует $n_1 \cdot n_2 \cdots n_r$ возможных исходов r экспериментов.



Комбинаторная вероятность

Перестановки

- **Мотивация:** Сколько разных упорядоченных последовательностей получается из множества $\{a, b, c\}$
- $P_n^r = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - r + 1)$

Комбинаторная вероятность

Перестановки: примеры

- **i Question**

Случайная выборка чисел. Пусть популяция состоит из десяти цифр 0, 1, ..., 9. Каждая последовательность из пяти цифр представляет выборку размера $r = 5$. Какова вероятность того, что пять последовательных случайных цифр все различны?

- $P = \frac{P_{10}^5}{10^5} = 0.3024.$

Комбинаторная вероятность

Комбинации

- **Мотивация:** Извлечь три элемента из множества $\{A, B, C, D, E\}$
- В общем случае, поскольку $n(n-1) \cdots (n-k+1)$ представляет количество различных способов, которыми группа из k элементов может быть выбрана из n элементов, когда порядок выбора важен, и поскольку каждая группа из k элементов будет подсчитана $k!$ раз в этом подсчете, следует, что количество различных групп из k элементов, которые могут быть образованы из множества n элементов, равно

$$\frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Definition

Мы определяем C_n^k , для $k \leq n$, как

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!},$$

и говорим, что C_n^k представляет количество возможных комбинаций (коллекций) размера k , полученных из n объектов. Порядок складывания элементов в данном случае не считается важным.

Комбинаторная вероятность

Комбинации: пример

Часто задачи подходят под модель извлечения шариков из мешка.

Пример: Мешок содержит 15 шариков, из которых 10 красных и 5 белых. Из мешка выбирают 4 шарика. Здесь есть неоднозначность: например, если при одном извлечении я выбираю четыре красных шарика, а при другом извлечении четыре других красных шарика, считаются ли эти выборки одинаковыми или нет? Мы будем предполагать, что это не одинаковые выборки. Например, мы можем представить, что шарики пронумерованы, так что мы можем различать шарики одного цвета. Такой способ мышления очень полезен для вычисления вероятностей в классической схеме.

Комбинаторная вероятность

Комбинации: пример

- 10 красных, 5 белых, пронумерованных шариков

•

i Question

Сколько различных выборок (размера 4) возможно?

- Порядок не важен, но номера важны, поэтому мы выбираем 4 элемента из множества $10 + 5$ элементов. Следовательно, ответ: $C_{15}^4 = 1365$.

•

i Question

Сколько выборок (размера 4) состоят полностью из красных шариков?

- Порядок не важен, но номера важны, мы выбираем 4 элемента из множества красных шариков. Следовательно, ответ: $C_{10}^4 = 210$.

Комбинаторная вероятность

Комбинации: пример

- 10 красных, 5 белых, пронумерованных шариков
-

i Question

Сколько выборок содержат 2 красных и 2 белых шарика?

- Мы можем выбрать 2 пронумерованных красных шарика C_{10}^2 способами и 2 пронумерованных белых шарика C_5^2 способами. Ни один выбор не влияет на другой, поэтому ответ: $C_{10}^2 \cdot C_5^2 = 45 \cdot 10 = 450$.
-

i Question

Сколько выборок (размера 4) содержат ровно 3 красных шарика?

- Мы можем выбрать 3 пронумерованных красных шарика C_{10}^3 способами и 1 пронумерованный белый шарик C_5^1 способами. Ни один выбор не влияет на другой, поэтому ответ: $C_{10}^3 \cdot C_5^1 = 120 \cdot 5 = 600$.

Комбинаторная вероятность

Комбинации: пример

- - i Question

Сколько выборок (размера 4) содержат не менее 3 красных шариков?

- Это количество выборок с 3 красными плюс количество выборок с 4 красными. Мы можем выбрать 4 пронумерованных красных шарика C_{10}^4 способами и 0 пронумерованных белых шариков C_5^0 способами. Ни один выбор не влияет на другой, поэтому ответ: $C_{10}^4 \cdot C_5^0 = 210 \cdot 1 = 210$. Из предыдущего примера, есть 600 способов выбрать выборки с ровно 3 красными шариками, поэтому наш ответ: $600 + 210 = 810$.

Комбинаторная вероятность

Смешанные задачи подсчета

- 10 красных, 5 белых, пронумерованных шариков

-

Question

Сколько выборок (размера 4) содержат хотя бы один красный шарик?

- Это $C_{10}^1 \cdot C_5^3 + C_{10}^2 \cdot C_5^2 + C_{10}^3 \cdot C_5^1 + C_{10}^4 \cdot C_5^0$, что равно
 $10 \cdot 10 + 45 \cdot 10 + 120 \cdot 5 + 210 \cdot 1 = 100 + 450 + 600 + 210 = 1360$.

Это также общее количество выборок (1365) минус количество выборок без красных шариков, которое равно $C_{10}^0 \cdot C_5^4 = 5$.