

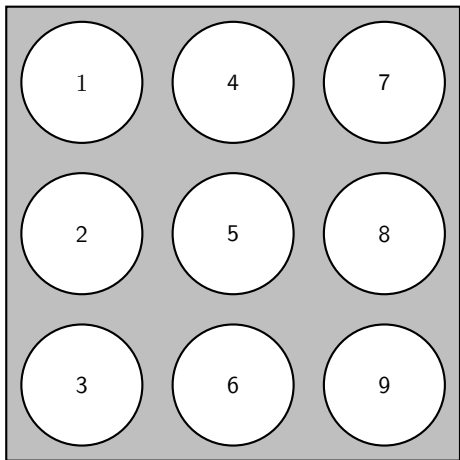
Теория вероятностей и математическая статистика

Условная вероятность. Независимость событий.

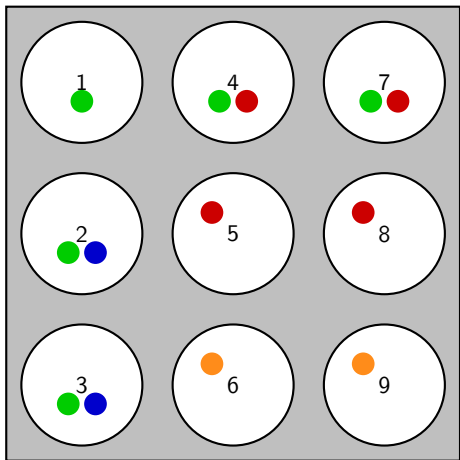
Глеб Карпов

Программы БИ, УЦП, ТАДвБ ВШБ ВШЭ.

Мысленный эксперимент



Мысленный эксперимент



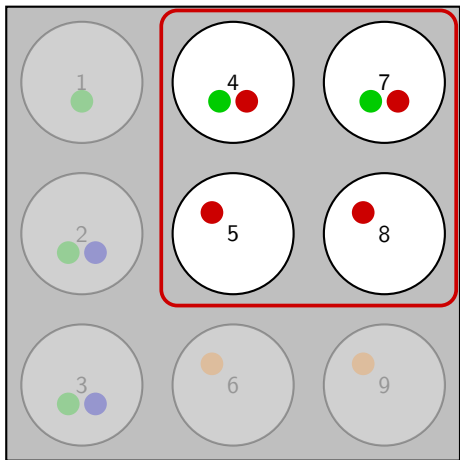
● Зеленая группа: 1,2,3,4,7

● Красная группа: 4,5,7,8

● Синяя группа: 2,3

● Оранжевая группа: 6,9

Мысленный эксперимент



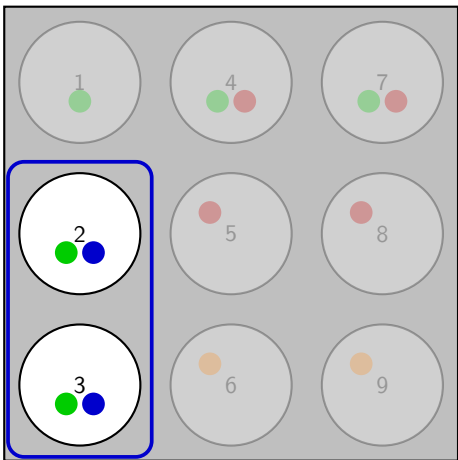
● Зеленая группа: 1,2,3,4,7

● Красная группа: 4,5,7,8

● Синяя группа: 2,3

● Оранжевая группа: 6,9

Мысленный эксперимент



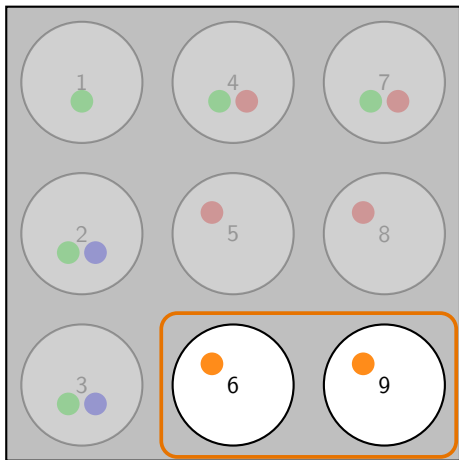
● Зеленая группа: 1,2,3,4,7

● Красная группа: 4,5,7,8

● Синяя группа: 2,3

● Оранжевая группа: 6,9

Мысленный эксперимент



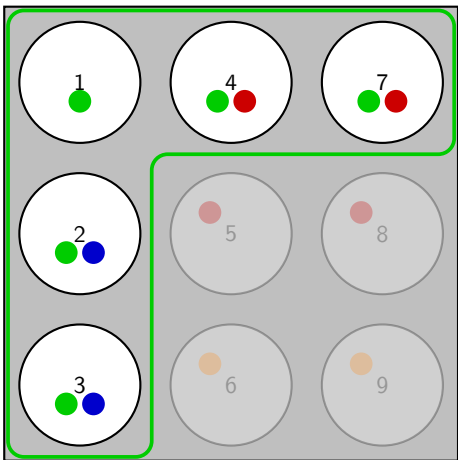
● Зеленая группа: 1,2,3,4,7

● Красная группа: 4,5,7,8

● Синяя группа: 2,3

● Оранжевая группа: 6,9

Мысленный эксперимент



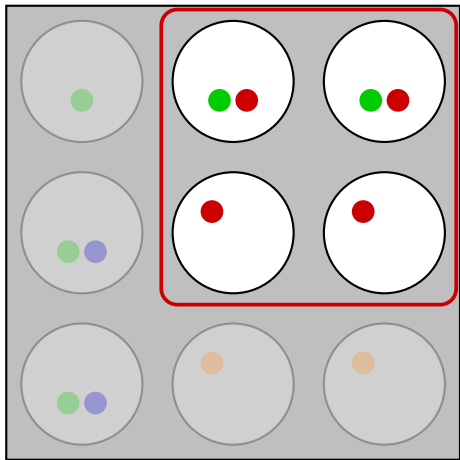
● Зеленая группа: 1,2,3,4,7

● Красная группа: 4,5,7,8

● Синяя группа: 2,3

● Оранжевая группа: 6,9

Мысленный эксперимент



Обычная вероятность

$$P(G) = \frac{5}{9}$$

$$P(\text{Orange}) = \frac{2}{9}$$

вероятность, если одновременно
происходит событие R

$$P(G | R) = \frac{2}{4}$$

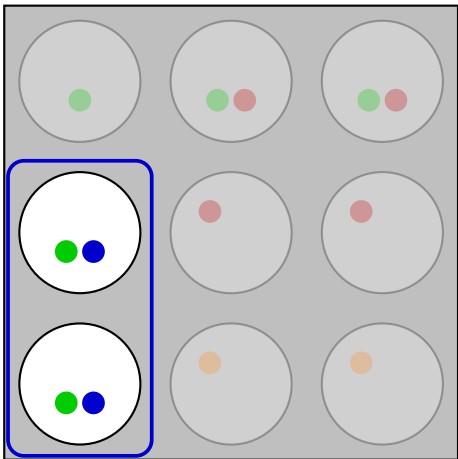
$$P(\text{Orange} | R) = 0$$

относительное сравнение

$$P(G) > P(G | R)$$

$$P(\text{Orange}) > P(\text{Orange} | R)$$

Мысленный эксперимент



Обычная вероятность

$$P(G) = \frac{5}{9}$$

$$P(R) = \frac{4}{9}$$

вероятность, если одновременно происходит событие B

$$P(G | B) = \frac{2}{2}$$

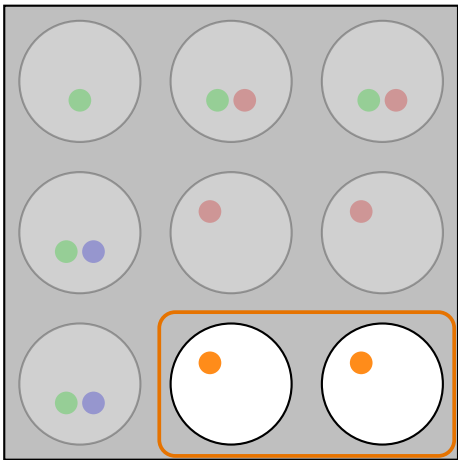
$$P(R | B) = 0$$

относительное сравнение

$$P(G) < P(G | B)$$

$$P(R) > P(R | B)$$

Мысленный эксперимент



Обычная вероятность

$$P(G) = \frac{5}{9}$$

$$P(R) = \frac{4}{9}$$

вероятность, если одновременно
происходит событие Orange

$$P(G \mid \text{Orange}) = 0$$

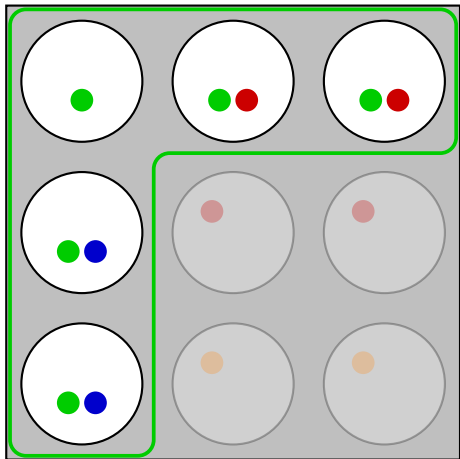
$$P(R \mid \text{Orange}) = 0$$

относительное сравнение

$$P(G) > P(G \mid \text{Orange})$$

$$P(R) > P(R \mid \text{Orange})$$

Мысленный эксперимент



Обычная вероятность

$$P(B) = \frac{2}{9}$$

$$P(R) = \frac{4}{9}$$

вероятность, если одновременно
происходит событие G

$$P(B | G) = \frac{2}{5}$$

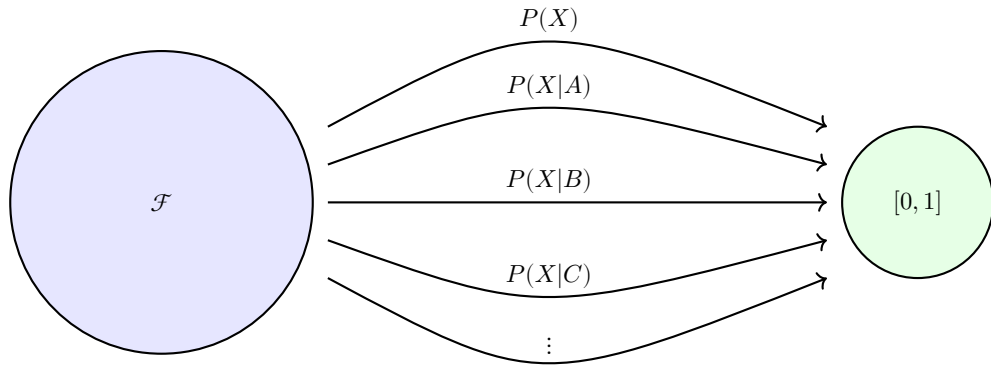
$$P(R | G) = \frac{2}{5}$$

относительное сравнение

$$P(B) < P(B | G)$$

$$P(R) > P(R | G)$$

Условная вероятность



Условная вероятность

Definition

Условная вероятность пересчитывается через обычную вероятность в виде:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Формула Байеса

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

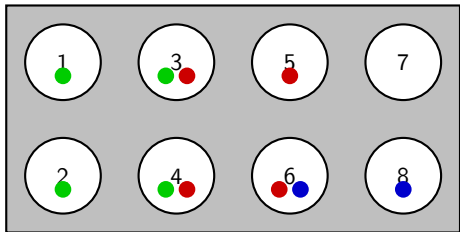
Условная вероятность

При каждом зафиксированном значении параметра (условия) $P(X|K)$ - отдельная самостоятельная вероятностная функция. Для каждой справедливы указанные ранее свойства:

- $\forall X, K \in \mathcal{F} : 0 \leq P(X|K) \leq 1$
- $\forall K \in \mathcal{F} : P(\Omega|K) = 1$. Easy to show: $P(\Omega|K) = \frac{P(\Omega \cap K)}{P(K)} = (K \subseteq \Omega) = \frac{P(K)}{P(K)} = 1$
- Аддитивность вероятности:

$$\forall X, Y, K \in \mathcal{F} : X \cap Y = \emptyset, P((X \cup Y)|K) = P(X|K) + P(Y|K)$$

Независимость событий

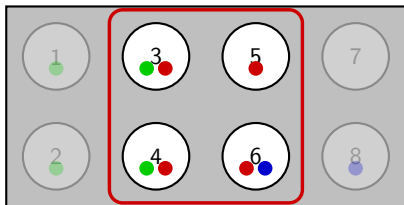


• $G = \{1, 2, 3, 4\}$

• $R = \{3, 4, 5, 6\}$

• $B = \{6, 8\}$

Независимость событий



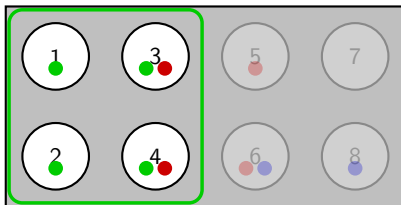
Обычная вероятность

$$P(G) = \frac{4}{8}$$

Условная вероятность,
если происходит R

$$P(G | R) = \frac{2}{4}$$

$$P(G) = P(G | R), \quad P(R) = P(R | G)$$



Обычная вероятность

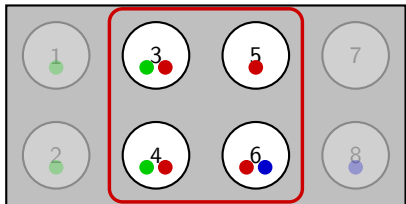
$$P(R) = \frac{4}{8}$$

Условная вероятность,
если происходит G

$$P(R | G) = \frac{2}{4}$$

$$P(G) = P(G | R), \quad P(R) = P(R | G)$$

Независимость событий

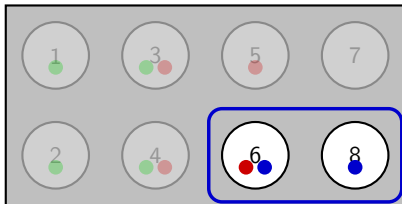


Обычная вероятность

$$P(B) = \frac{2}{8}$$

Условная вероятность,
если происходит R

$$P(B | R) = \frac{1}{4}$$



Обычная вероятность

$$P(R) = \frac{4}{8}$$

Условная вероятность,
если происходит B

$$P(R | B) = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = P(B | R), \quad P(R) = P(R | B)$$

Независимость событий

- Наблюдаем: $P(B) = P(B|R)$, $P(R) = P(R|B)$. Коэффициент ожидания этих событий а.к.а. вероятность не зависит от того, происходит ли одновременно другое событие или нет. Мы называем такие события **независимыми**.
- Более формально, чтобы называть A и B независимыми, должно выполняться:

$$P(A|B) = P(A) \text{ и } P(B|A) = P(B), \text{ при } P(A), P(B) > 0.$$

Независимость событий

- Если немного поработаем с идеей о независимости, получим более удобное определение:

$$P(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

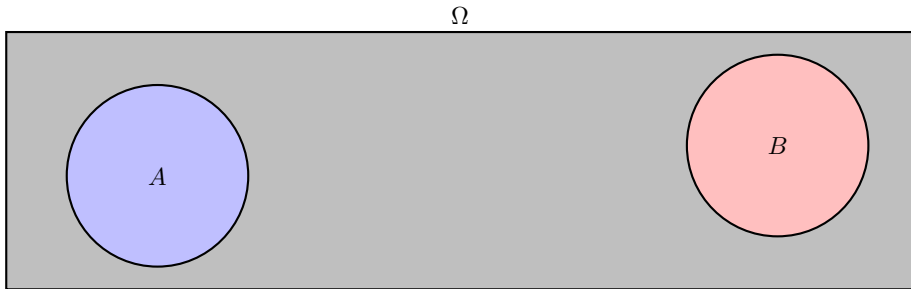
i Definition

События A и B из одного вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ называются независимыми, если:

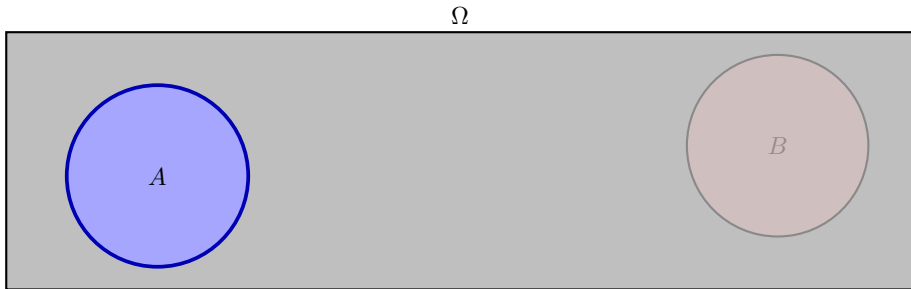
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B),$$

и зависимыми в обратном случае.

Непересекающиеся — независимые?



Непересекающиеся — независимые?



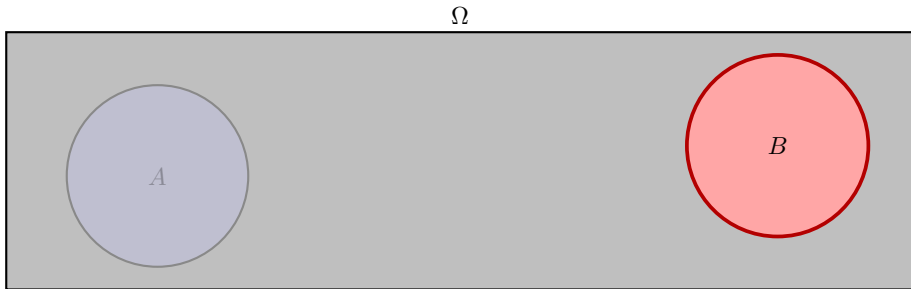
Обычные вероятности

$$P(\textcolor{red}{B}) > 0$$

если произошло $\textcolor{blue}{A}$

$$P(\textcolor{red}{B} \mid \textcolor{blue}{A}) = 0$$

Непересекающиеся — независимые?



Обычные вероятности

$$P(A) > 0$$

если произошло B

$$P(A | B) = 0$$

Логика высказываний про независимость

Пары событий: $\{(A, B) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} : P(A), P(B) > 0\}$

