

Теория вероятностей и математическая статистика

Дискретные случайные величины. Математическое ожидание.

Глеб Карпов

Программы БИ, УЦП, ТАДвБ ВШБ ВШЭ.

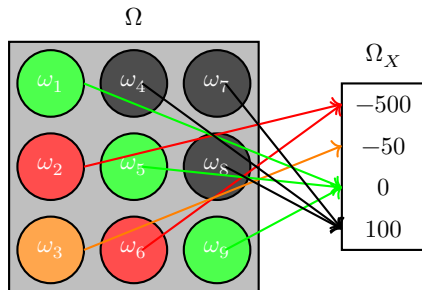
Случайные величины: Мотивация

- Элементарный исход в общем может иметь различный характер: цвет, буква, звук и т.д. Но для более углубленного и полного анализа случайного эксперимента лучше работать с числами.
- Можем ли мы также прикрепить число к каждому элементарному исходу независимо от его природы, а затем оперировать **только** в пространстве чисел? Спойлер: это даст нам новые инструменты, которые недоступны, если мы работаем с исходами разной природы.
- Пример: игральная кость с 6 гранями, 2 грани желтые, 2 грани зеленые, 2 грани черные, без чисел - мы можем искусственно прикрепить числа 1, 2, 3 к каждому цвету.

Случайные величины: Формальное определение

Результирующее 'прикрепленное' число мы называем случайной величиной.

- Дискретная случайная величина X в пространстве вероятностей $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ является отображением $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, такое что:
- Образ $X(\Omega) = \Omega_X = \text{Im } X$ (все возможные результаты) является счетным подмножеством $\mathbb{R}$,
 - $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\} \in \mathcal{F}$, для $x \in \mathbb{R}$.
- Для упрощения мы сокращаем события вида $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$ до более простого вида $\{X = x\}$.



Вероятность случайной величины

- Основной оставшийся вопрос - как находить вероятности различных значений С.В.
- Мы знаем, что каждое уникальное значение С.В. привязано к какому-то событию из $\mathcal{F}$. Тогда вероятность этого события и будет вероятностью получить данное значение С.В.
- Определение. Функция вероятности дискретной случайной переменной X - это функция $p_X(x) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, заданная как:

$$p_X(x) = P(X = x) = P(A), \text{ где } A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$$

- Свойства:

1. $p_X(x) \geq 0$ для $\forall x \in \Omega_X$, $p_X(x) = 0$ для $x \notin \Omega_X$
2. $\sum_{x_i \in \Omega_X} p_X(x_i) = 1$.

Случайные величины: Пример

Подбрасываются две монеты. Первая монета выпадает орлом с вероятностью 0.6, вторая с вероятностью 0.7. Предположим, что результаты подбрасываний независимы, и пусть X равно общему количеству выпавших орлов. Постройте дискретную случайную величину и её функцию вероятности.

Случайные величины: Пример (решение)

- Исходы пары монет: (T, T) , (H, T) , (T, H) , (H, H) ; X — число орлов, $\Omega_X = \{0, 1, 2\}$.
- Каждое значение X — событие из $\mathcal{F}$, набор исходов. Из независимости:

$$P(X = 0) = P(\{(T, T)\}) = 0.4 \cdot 0.3 = 0.12,$$

$$P(X = 2) = P(\{(H, H)\}) = 0.6 \cdot 0.7 = 0.42,$$

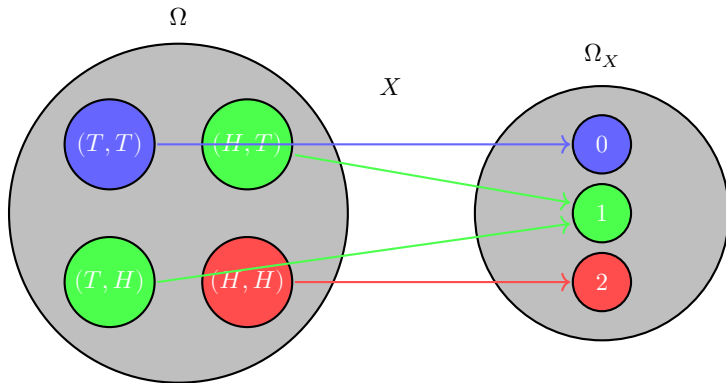
$$P(X = 1) = P(\{(H, T), (T, H)\}) = 0.6 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.7 = 0.46.$$

- Функция вероятности:

x	0	1	2
$p_X(x)$	0.12	0.46	0.42

$$\sum_{x \in \Omega_X} p_X(x) = 1.$$

Случайные величины: Пример



Новое пространство вероятности

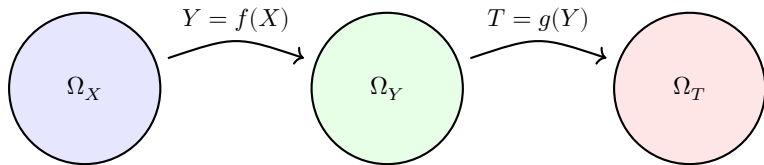
- Как и прежде, мы можем комбинировать случайные переменные в события.
- Например, $A = \{x_1, \dots, x_k\}$, $x_1, \dots, x_k \in \Omega_X$.
- Для вычисления $P(A)$ мы используем принцип аддитивности:

$$P(A) = P(\{X = x_1\} \cup \dots \cup \{X = x_k\}) = \sum_{i=1}^k P(\{X = x_i\}).$$

- В конечном счете, мы можем забыть о нашем оригинальном $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, скрыть их 'под капотом' нашего случайного эксперимента. Вместо этого мы используем новое пространство Ω_X всех возможных значений С.В. и $p_X(x)$ как новую функцию вероятности.

Функции от случайных величин

- Случайная величина, будучи неизвестным, но все-таки числом, может быть аргументом для какой-либо другой функции,
- Например, если X - это количество проданных тортов, то $Y = cX$ - это доход, где c - цена. Далее, $T = Y - aX - b = kX - b$ может быть чистой прибылью, доход за вычетом издержек на производство. Все это - случайные величины!



Функции от случайных величин

Пример

Пусть распределение случайной величины задано таблицей

x	0	-1	-2	1	2	3
$p_X(x)$	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3

Постройте распределение случайной величины $Y = X^2 + 10$.

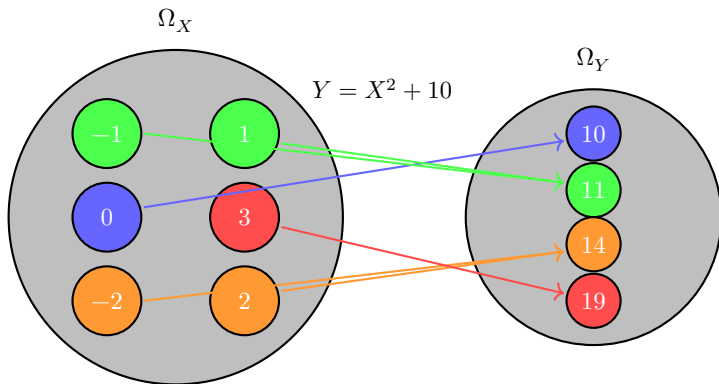
Наша задача: восстановить новое пространство элементарных исходов Ω_Y для величины Y и выразить новую функцию вероятности $P_Y(y)$ через старую известную $P_X(x)$.

- $P_Y(Y = 10) = P_X(\{X = 0\}) = 0.1$
- $P_Y(Y = 11) = P_X(\{X = 1\} \cup \{X = -1\}) = P_X(\{X = 1\}) + P_X(\{X = -1\}) = 0.3$
- $P_Y(Y = 14) = P_X(\{X = 2\} \cup \{X = -2\}) = P_X(\{X = 2\}) + P_X(\{X = -2\}) = 0.3$
- $P_Y(Y = 19) = P_X(\{X = 3\}) = 0.3$

y	10	11	14	19
$p_Y(y)$	0.1	0.3	0.3	0.3

Функции от случайных величин

Пример



Функции от случайных величин

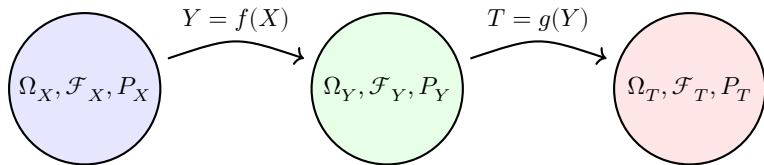
- Если $Y = g(X)$, то Y это новая случайная величина, со своими характеристиками, со своими возможными значениями Ω_Y , и со своей функцией вероятности $P_Y(y)$.

💡 Построение новой функции вероятности

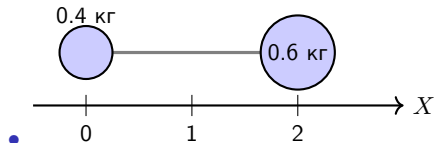
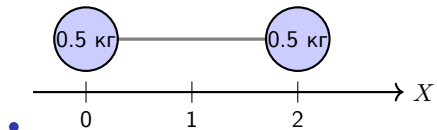
Если $Y = g(X)$, функцию вероятности для Y можно выразить через функцию вероятности для X :

$$p_Y(y) = P(Y = y) = P(g(X) = y) = P(\{X \in g^{-1}(y)\}) = \sum_{x \in g^{-1}(y)} P(X = x)$$

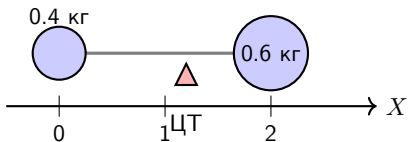
- Можно говорить, что функция от случайной величины порождает абсолютно новый случайный эксперимент с новым вероятностным пространством (тройкой Колмогорова):



Физическое Лирическое отступление



Физическое Лирическое отступление



- $x_{gc} = \sum_i x_i m_i$, при $\sum_i m_i = 1$.
- В данном примере $x_{gc} = 0 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.6 = 1.2$
- Предположим С.В., которую мы реализуем 10^5 раз с $P_X(0) = 0.4$, $P_X(2) = 0.6$. Посчитаем среднее суммы за все испытания:

$$avg = \frac{\approx 60000 \cdot 2 + \approx 40000 \cdot 0}{10^5} \approx 1.2$$

Характеристики С.В.: Математическое ожидание

- Математическое ожидание - это число, **константа**, которое помогает нам понять тренд значений, куда в среднем стремятся значения случайной величины на большой дистанции.
- Можно рассматривать это как средний результат множества реализаций данного случайного эксперимента.
- Ожидаемое значение может не входить в набор возможных значений Ω_X .
-

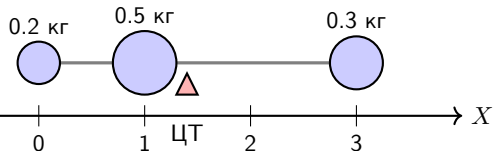
Definition

Если X - дискретная случайная величина, то ожидание X обозначается как $E[X]$ и определяется как:

$$E[X] = \sum_{x \in \Omega_X} xP(X = x) = \sum_{x \in \Omega_X} xP_X(x).$$

Характеристики С.В.: Математическое ожидание

В физическом мире:



- $x_{gc} = \sum x_i m_i = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.5 + 3 \cdot 0.3 = 1.4$

В вероятностном мире:

x	0	1	3
$p_X(x)$	0.2	0.5	0.3

- $E[X] = \sum x_i \cdot P_X(X = x_i) = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.5 + 3 \cdot 0.3 = 1.4$

💡 Fun fact

В международной литературе функция вероятности дискретной случайной величины $P_X(x)$ называется Probability **Mass** Function, своим названием явно подчеркивая аналогию, что вероятность может выступать в роли “массы” элементарного исхода. Тогда математическое ожидание можно интерпретировать как взвешенную сумму всех исходов, где в качестве веса используется вероятность.

Свойства математического ожидания

1. **Линейность:** Для любых констант a и b :

$$E[aX + b] = aE[X] + b$$

2. **Константа:** Если c - константа, то:

$$E[c] = c$$

3. **Ожидание функции:** Для новой случайной величины Y , если мы знаем, что $Y = g(X)$:

$$E[Y] = E[g(X)] = \sum_{x \in \Omega_X} g(x)P(X = x)$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{y \in \Omega_Y} y P(Y = y) = \\ &= \sum_{y \in \Omega_Y} y \left(\sum_{x \in g^{-1}(y)} P(X = x) \right) = \sum_{x \in \Omega_X} g(x)P(X = x) \end{aligned}$$

Математическое ожидание: пример

Посмотрим на примеры вычисления математического ожидания на основе уже посчитанной задачи:

x	0	-1	-2	1	2	3
$p_X(x)$	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3

y	10	11	14	19
$p_Y(y)$	0.1	0.3	0.3	0.3

- $E[X] = \sum_{i=1}^6 x_i P_X(X = x_i) = -0.1 - 0.2 + 0.2 + 0.4 + 0.9 = 1.2$
- Первый подход к вычислению $E[Y]$ - по определению, зная таблицу функции вероятности для Y :

$$E[Y] = \sum_{i=1}^4 y_i P_Y(Y = y_i) = 10 \cdot 0.1 + 11 \cdot 0.3 + 14 \cdot 0.3 + 19 \cdot 0.3 = 14.2$$

- Второй подход к вычислению $E[Y]$ - по свойству **3** с предыдущего слайда. Главная идея: мы можем миновать шаг построения таблицы вероятности для Y и сразу предсказать, каким будет $E[Y]$, по таблице вероятностей для X и зная вид функции $Y = g(X)$, в нашем примере $Y = X^2 + 10$:

$$\begin{aligned} E[Y] &= \sum_{i=1}^6 g(x_i) P_X(X = x_i) = \sum_{i=1}^6 (x_i^2 + 10) P_X(X = x_i) = \\ &= 10 \cdot 0.1 + 11 \cdot 0.1 + 14 \cdot 0.1 + 11 \cdot 0.2 + 14 \cdot 0.2 + 19 \cdot 0.3 = 14.2 \end{aligned}$$